

Бином Ньютона

1. Докажите, что

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

2. Докажите, что

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$$

3. Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{300}$?
4. Какое слагаемое в разложении $(1 + \sqrt{3})^{100}$ будет наибольшим?
5. Вычислите суммы $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n$; $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$;
 $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$
6. Используя формулы задач 1 и 2 докажите:

1) $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$, $(0 \leq k \leq m \leq r)$

2) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$

3) $C_{m+n}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$

4) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$

7. Докажите, что $2^n > (1 - x)^n + (1 + x)^n$ при целом $n \geq 2$ и $|x| < 1$
8. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 1000000?
9. Решить в натуральных числах уравнение

$$x^{2y} + (x + 1)^{2y} = (x + 2)^{2y}$$

10. Докажите неравенство

$$\sin^{2n} x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1$$