

Инверсия + симметрия 2

1. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω , соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC , делит пополам отрезок BP .

2. Обозначим середины стороны AB , BC и AC треугольника ABC через C_0 , A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O . Окружности, описанные около треугольников AOB и $A_0B_0C_0$ пересекаются в точках P и Q . Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

3. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность γ касается отрезков AB и AC в точках P и Q , а также описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что $APIQ$ — ромб.

4. Дан неравносторонний треугольник ABC . Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC . Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1 , I_2 , A , N лежат на одной окружности.

5. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XU параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC . Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причем расположены между прямыми BC и XU . Докажите, что общие а) внешние (b) внутренние) касательные к эти окружностям пересекаются в точке, лежащей на а) внешней (b) внутренней) биссектрисе угла A .

6. Даны точки A , B , C и D . Пусть X , Y и Z — точки Микеля всевозможных “четырёхугольников”, образованных на этих точках. Докажите, что точки A , B , C и D (как множество из четырех точек) переходят сами в себя при нашем преобразовании относительно треугольника XYZ .

Инверсия + симметрия 2

1. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω , соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC , делит пополам отрезок BP .

2. Обозначим середины стороны AB , BC и AC треугольника ABC через C_0 , A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O . Окружности, описанные около треугольников AOB и $A_0B_0C_0$ пересекаются в точках P и Q . Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

3. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность γ касается отрезков AB и AC в точках P и Q , а также описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что $APIQ$ — ромб.

4. Дан неравносторонний треугольник ABC . Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC . Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1 , I_2 , A , N лежат на одной окружности.

5. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XU параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC . Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причем расположены между прямыми BC и XU . Докажите, что общие а) внешние (b) внутренние) касательные к эти окружностям пересекаются в точке, лежащей на а) внешней (b) внутренней) биссектрисе угла A .

6. Даны точки A , B , C и D . Пусть X , Y и Z — точки Микеля всевозможных “четырёхугольников”, образованных на этих точках. Докажите, что точки A , B , C и D (как множество из четырех точек) переходят сами в себя при нашем преобразовании относительно треугольника XYZ .